दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» दो चर वाले रैखिक समीकरण युग्म का परिचय

प्रश्न 1 (आसान). एक कॉपी का मूल्य x रुपये है और एक पेन का मूल्य y रुपये है। अगर आपने 2 कॉपी और 3 पेन 35 रुपये में खरीदे, तो समीकरण बनाइए।

उत्तर – 2x + 3y = 35

प्रश्न 2 (आसान). पिता की आयु x और पुत्र की आयु y है। पिता की आयु पुत्र की आयु की तीन गुनी है। समीकरण क्या होगा?

उत्तर – x = 3y

प्रश्न 3 (मध्यम). एक आयत की लंबाई x मीटर है और चौड़ाई y मीटर है। आयत का परिमाप 20 मीटर है, और लंबाई चौड़ाई से 2 मीटर ज्यादा है। इन दोनों स्थितियों के लिए समीकरण युग्म बनाइए।

उत्तर – 2(x + y) = 20 और x = y + 2

प्रश्न 4 (कठिन). किसी भिन्न का अंश x और हर y है। यदि अंश में 1 जोड़ा जाए तो भिन्न 1/2 हो जाती है। यदि हर में 1 घटाया जाए तो भिन्न 1/3 हो जाती है। समीकरण युग्म बनाइए।

उत्तर – (x+1)/y = 1/2 और x/(y-1) = 1/3

» रैखिक समीकरण युग्म के ग्राफीय निरूपण और हल की प्रकृति

प्रश्न 5 (आसान). अगर दो रेखाएँ ग्राफ पर एक बिंदु पर काटती हैं, तो कितने हल होंगे?

उत्तर – एक हल (अद्वितीय हल)

प्रश्न 6 (आसान). क्या समांतर रेखाओं का कोई हल होता है?

उत्तर – नहीं, कोई हल नहीं होता।

प्रश्न 7 (मध्यम). समीकरण युग्म 2x + 3y = 6 और 4x + 6y = 12 किस प्रकार की रेखाएँ दर्शाते हैं और इनके कितने हल होंगे? (बिना ग्राफ बनाए अंदाज़ा लगाएँ)

उत्तर – संपाती रेखाएँ (एक के ऊपर एक), अपरिमित रूप से अनेक हल।

» गुणांकों की तुलना द्वारा हल की प्रकृति ज्ञात करना

प्रश्न 8 (आसान). निम्न समीकरणों के हल की प्रकृति ज्ञात करें: x + y = 5, 2x + 2y = 10

उत्तर – a/a = 1/2, b/b = 1/2, c/c = 5/10 = 1/2। तीनों बराबर हैं, इसलिए संपाती रेखाएँ और अनगिनत हल।

प्रश्न 9 (आसान). निम्न समीकरणों के हल की प्रकृति ज्ञात करें: 2x + 3y = 9, 4x + 6y = 18

उत्तर – a/a = 2/4 = 1/2, b/b = 3/6 = 1/2, c/c = 9/18 = 1/2। तीनों बराबर हैं, इसलिए संपाती रेखाएँ और अनगिनत हल।

प्रश्न 10 (मध्यम). समीकरण युग्म x - 2y = 0 और 3x + 4y - 20 = 0 के हलों की प्रकृति ज्ञात करें।

उत्तर – a/a = 1/3, b/b = -2/4 = -1/2। a/a b/b, इसलिए प्रतिच्छेदी रेखाएँ और अद्वितीय हल।

प्रश्न 11 (कठिन). k के किस मान के लिए समीकरण युग्म kx + 3y = k-3 और 12x + ky = k के अनंत अनेक हल होंगे?

उत्तर – अनंत अनेक हल के लिए a/a = b/b = c/c होना चाहिए। k/12 = 3/k = (k-3)/k। k/12 = 3/k से k^2 = 36 => k = ±6। अब 3/k = (k-3)/k से 3k = k(k-3) => 3 = k-3 => k = 6। दोनों से k=6 समान आ रहा है, इसलिए k = 6।

» ग्राफीय विधि से रैखिक समीकरण युग्म हल करना

प्रश्न 12 (आसान). समीकरण x + y = 4 के लिए दो बिंदु ज्ञात करें।

उत्तर – (0, 4), (4, 0)

प्रश्न 13 (आसान). समीकरण y = 2x के लिए दो बिंदु ज्ञात करें।

उत्तर – (0, 0), (1, 2)

प्रश्न 14 (मध्यम). समीकरण युग्म x + y = 6 और x - y = 2 को ग्राफीय विधि से हल कीजिए।

उत्तर – x = 4, y = 2

प्रश्न 15 (कठिन). समीकरण युग्म 2x + 3y = 12 और x - y = 1 को ग्राफीय विधि से हल कीजिए।

उत्तर – x = 3, y = 2

» प्रतिस्थापन विधि (Substitution Method) का परिचय

प्रश्न 16 (आसान). x + y = 5 और x - y = 1 को प्रतिस्थापन विधि से हल करें।

उत्तर – x = 3, y = 2

प्रश्न 17 (आसान). 2x + y = 7 और y = x + 1 को हल करें।

उत्तर – x = 2, y = 3

प्रश्न 18 (मध्यम). 3x + 4y = 10 और 2x - 2y = 2 को प्रतिस्थापन विधि से हल करें।

उत्तर – x = 2, y = 1

प्रश्न 19 (कठिन). 2x + 3y = 0 और 3x - 8y = 0 को प्रतिस्थापन विधि से हल करें।

उत्तर – x = 0, y = 0

» प्रतिस्थापन विधि के चरण और अनुप्रयोग

प्रश्न 20 (आसान). x + y = 5 और x - y = 1 को प्रतिस्थापन विधि से हल करें।

उत्तर – x = 3, y = 2

प्रश्न 21 (आसान). s - t = 3 और s/3 + t/2 = 6 को प्रतिस्थापन विधि से हल करें।

उत्तर – s = 9, t = 6

प्रश्न 22 (मध्यम). एक क्रिकेट टीम के कोच ने 7 बल्ले और 6 गेंदें ₹3800 में खरीदीं। बाद में, उसने 3 बल्ले और 5 गेंदें ₹1750 में खरीदीं। प्रत्येक बल्ले और प्रत्येक गेंद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

उत्तर – बल्ले का मूल्य = ₹500, गेंद का मूल्य = ₹50

प्रश्न 23 (कठिन). यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में 2 जोड़ दिया जाए, तो वह 9/11 हो जाती है। यदि अंश और हर दोनों में 3 जोड़ दिया जाए, तो वह 5/6 हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

उत्तर – भिन्न 7/9 है।

» विलोपन विधि (Elimination Method) का परिचय

प्रश्न 24 (आसान). x + y = 7 और x - y = 3 को हल करें।

उत्तर – x = 5, y = 2

प्रश्न 25 (आसान). 2x + 3y = 8 और 2x - y = 0 को हल करें।

उत्तर – x = 1, y = 2

प्रश्न 26 (मध्यम). 3x + 4y = 10 और 2x - 2y = 2 को हल करें।

उत्तर – x = 2, y = 1

प्रश्न 27 (कठिन). 0.4x + 0.3y = 1.7 और 0.7x - 0.2y = 0.8 को हल करें।

उत्तर – x = 2, y = 3

» विलोपन विधि के चरण और अनुप्रयोग

प्रश्न 28 (आसान). x + y = 7 और x - y = 3 को विलोपन विधि से हल करें।

उत्तर – x = 5, y = 2

प्रश्न 29 (आसान). 2x + y = 5 और x - y = 1 को विलोपन विधि से हल करें।

उत्तर – x = 2, y = 1

प्रश्न 30 (मध्यम). 3x + 4y = 10 और 2x - 2y = 2 को विलोपन विधि से हल करें।

उत्तर – x = 2, y = 1

प्रश्न 31 (कठिन). दो अंकों की एक संख्या और उसके अंकों को उलटने पर बनी संख्या का योग 66 है। यदि संख्या के अंकों का अंतर 2 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर – संख्याएँ 42 और 24 हैं।

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. एक स्थिति को गणितीय रूप में व्यक्त कीजिए: 'एक कक्षा में लड़कों की संख्या (x) और लड़कियों की संख्या (y) है। कुल विद्यार्थी 10 हैं। और लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से 4 अधिक है।'

› पहला वाक्य 'कुल विद्यार्थी 10 हैं' से हमें पहला समीकरण मिलेगा। लड़के और लड़कियाँ मिलकर कुल 10 हैं, तो: x + y = 10

› दूसरा वाक्य 'लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या से 4 अधिक है' से दूसरा समीकरण मिलेगा। इसका मतलब है कि लड़कियों (y) की संख्या लड़कों (x) की संख्या में 4 जोड़ने पर आती है: y = x + 4

› तो अब हमारे पास दो चर (x और y) और दो रैखिक समीकरण (दोनों में घात 1 है) का एक युग्म है।

उत्तर – समीकरण युग्म: x + y = 10 और y = x + 4

उदाहरण 2. समीकरण युग्म x + y = 5 और x - y = 1 को ग्राफीय विधि से हल करके हलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

› पहला समीकरण है: x + y = 5.

› इसके लिए कुछ बिंदु निकालेंगे: अगर x = 0, तो y = 5. (0, 5) मिलेगा। अगर y = 0, तो x = 5. (5, 0) मिलेगा। इन दोनों बिंदुओं को ग्राफ पर अंकित करेंगे और एक सीधी रेखा खींचेंगे।

› दूसरा समीकरण है: x - y = 1.

› इसके लिए कुछ बिंदु निकालेंगे: अगर x = 0, तो y = -1. (0, -1) मिलेगा। अगर y = 0, तो x = 1. (1, 0) मिलेगा। इन दोनों बिंदुओं को भी ग्राफ पर अंकित करेंगे और एक सीधी रेखा खींचेंगे।

› अब ग्राफ पर देखो, ये दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को किस बिंदु पर काट रही हैं? अगर आप ध्यान से देखेंगे, तो ये (3, 2) पर काटेंगी।

› क्योंकि रेखाएँ एक-दूसरे को एक बिंदु पर काट रही हैं, तो हम कहेंगे कि समीकरण युग्म का 'अद्वितीय हल' है, यानी केवल एक हल है।

उत्तर – रेखाएँ प्रतिच्छेदी हैं और इनका अद्वितीय हल (x=3, y=2) है।

उदाहरण 3. समीकरण युग्म 3x + 2y = 5 और 2x - 3y = 7 के हलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

› पहले समीकरणों को मानक रूप ax + by + c = 0 में लिखें:
› समीकरण 1: 3x + 2y - 5 = 0 => a = 3, b = 2, c = -5
› समीकरण 2: 2x - 3y - 7 = 0 => a = 2, b = -3, c = -7
› अब गुणांकों की तुलना करें:
› a/a = 3/2
› b/b = 2/(-3) = -2/3
› c/c = (-5)/(-7) = 5/7
› यहाँ a/a (3/2) b/b (-2/3) है।
› चूँकि a/a b/b, यह पहली स्थिति है।

उत्तर – इसलिए, रेखाएँ प्रतिच्छेद करेंगी और समीकरण युग्म का एक अद्वितीय हल (unique solution) होगा। यह संगत समीकरण युग्म है।

उदाहरण 4. समीकरण युग्म x + y = 5 और x - y = 1 को ग्राफीय विधि से हल कीजिए।

› पहला समीकरण: x + y = 5
› x = 0 रखने पर, 0 + y = 5, तो y = 5। (बिंदु: (0, 5))
› y = 0 रखने पर, x + 0 = 5, तो x = 5। (बिंदु: (5, 0))
› दूसरा समीकरण: x - y = 1
› x = 0 रखने पर, 0 - y = 1, तो y = -1। (बिंदु: (0, -1))
› y = 0 रखने पर, x - 0 = 1, तो x = 1। (बिंदु: (1, 0))
› अब ग्राफ पेपर पर इन बिंदुओं (0, 5), (5, 0) को प्लॉट करके एक रेखा खींचो।
› फिर बिंदुओं (0, -1), (1, 0) को प्लॉट करके दूसरी रेखा खींचो।
› आप देखोगे कि दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को बिंदु (3, 2) पर काट रही हैं।
› यही तुम्हारा हल है।

उत्तर – हल है: x = 3, y = 2

उदाहरण 5. समीकरण युग्म 7x - 15y = 2 और x + 2y = 3 को प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए।

› पहला समीकरण: 7x - 15y = 2 (समीकरण 1)
› दूसरा समीकरण: x + 2y = 3 (समीकरण 2)
› पहले हम समीकरण 2 से x का मान y के पदों में निकालेंगे। यह आसान है क्योंकि x अकेला है।
› x + 2y = 3 x = 3 - 2y (इसे समीकरण 3 मान लेते हैं)
› अब, x के इस मान (3 - 2y) को समीकरण 1 में रखेंगे। ध्यान रहे, दूसरे समीकरण में रखना है।
› 7(3 - 2y) - 15y = 2
› ब्रैकेट खोलेंगे: 21 - 14y - 15y = 2
› y वाले पदों को एक साथ करेंगे: 21 - 29y = 2
› संख्याओं को एक तरफ ले जाएँगे: -29y = 2 - 21
› -29y = -19
› y = (-19) / (-29) y = 19/29
› अब हमें y का मान मिल गया है। इस y के मान (19/29) को समीकरण 3 में रखेंगे ताकि x का मान मिले।
› x = 3 - 2(19/29)
› x = 3 - 38/29
› लघुत्तम समापवर्त्य (LCM) लेंगे: x = (3 * 29 - 38) / 29
› x = (87 - 38) / 29
› x = 49/29

उत्तर – तो, हल है x = 49/29 और y = 19/29।

उदाहरण 6. दो संख्याओं का अंतर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

› पहला चरण: मान लो दो संख्याएँ x और y हैं।

› प्रश्न के अनुसार, पहली शर्त है: x - y = 26 (समीकरण 1)

› दूसरी शर्त है: x = 3y (समीकरण 2)

› दूसरा चरण: यहाँ समीकरण 2 से x का मान सीधे-सीधे y के पदों में दिया है (x = 3y)।

› अब इस x के मान को समीकरण 1 में प्रतिस्थापित करेंगे: (3y) - y = 26

› इसे हल करने पर: 2y = 26, तो y = 26/2 = 13

› तीसरा चरण: y का मान 13 आ गया। अब इस y के मान को समीकरण 2 में रखेंगे (या समीकरण 1 में भी रख सकते हैं, जो आसान लगे): x = 3 * 13

› तो, x = 39

› इस प्रकार, हमें दोनों संख्याएँ मिल गईं।

उत्तर – संख्याएँ 39 और 13 हैं।

उदाहरण 7. समीकरण युग्म को विलोपन विधि से हल करें:

(1) 9x - 4y = 2000

(2) 7x - 3y = 2000

› यहाँ हमें y चर को विलुप्त करना है। y के गुणांक हैं -4 और -3। इन्हें समान बनाने के लिए, समीकरण (1) को 3 से और समीकरण (2) को 4 से गुणा करेंगे।

› समीकरण (1) को 3 से गुणा करने पर: 3 * (9x - 4y) = 3 * 2000 => 27x - 12y = 6000 (यह समीकरण 3 है)

› समीकरण (2) को 4 से गुणा करने पर: 4 * (7x - 3y) = 4 * 2000 => 28x - 12y = 8000 (यह समीकरण 4 है)

› अब, समीकरण (4) में से समीकरण (3) को घटाएंगे ताकि -12y और -12y कट जाएं (विलोप हो जाए):

› (28x - 12y) - (27x - 12y) = 8000 - 6000

› 28x - 12y - 27x + 12y = 2000

› x = 2000

› अब x का मान 2000 को किसी भी मूल समीकरण में रख सकते हैं, मान लो समीकरण (1) में रखते हैं:

› 9(2000) - 4y = 2000

› 18000 - 4y = 2000

› -4y = 2000 - 18000

› -4y = -16000

› y = -16000 / -4

› y = 4000

उत्तर – तो, x = 2000 और y = 4000.

उदाहरण 8. विलोपन विधि का प्रयोग करके निम्न रैखिक समीकरण युग्म को हल कीजिए:

2x + 3y = 8

4x + 6y = 7

› पहला चरण: किसी एक चर के गुणांकों को समान करना है। यहाँ हम x के गुणांकों को समान करते हैं। समीकरण (1) को 2 से गुणा करने पर हमें मिलेगा: 2 * (2x + 3y) = 2 * 8, यानी 4x + 6y = 16 (यह हमारा नया समीकरण (3) बन गया)। समीकरण (2) पहले से ही 4x के साथ है, तो उसे 1 से गुणा करते हैं, जो वही रहेगा: 4x + 6y = 7 (यह हमारा नया समीकरण (4) बन गया)।

› दूसरा चरण: अब हमें इन समीकरणों को जोड़ना या घटाना है ताकि एक चर विलुप्त हो जाए। हमारे पास समीकरण (3) है 4x + 6y = 16 और समीकरण (4) है 4x + 6y = 7। अगर हम समीकरण (4) को समीकरण (3) में से घटाते हैं तो: (4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7।

› तीसरा चरण: इसे हल करने पर हमें मिलता है: 0x + 0y = 9, यानी 0 = 9। अरे! यह तो एक असत्य कथन है। मतलब 0 कभी भी 9 के बराबर नहीं हो सकता।

› चौथा चरण: जब हमें ऐसा कोई असत्य कथन मिलता है, तो इसका मतलब है कि दिए गए समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है। ऐसी स्थिति में रेखाएँ समांतर होती हैं। हम x या y का मान नहीं निकाल सकते।

उत्तर – दिए गए समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• यह विषय बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत ज़रूरी है! अक्सर स्थिति को पढ़कर समीकरण बनाने वाले प्रश्न आते हैं।

• यह टॉपिक बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। ग्राफीय विधि से समीकरण हल करने का सवाल लगभग हर साल आता है। ध्यान से प्रैक्टिस करना!

• यह टॉपिक बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है! 'k' के मान ज्ञात करने वाले प्रश्न अक्सर 3 या 4 नंबर में पूछे जाते हैं, जहाँ आपको समांतर रेखाओं या अनंत हल की शर्त लगानी होती है।

• यह विधि बोर्ड परीक्षा में 3-4 अंक का एक निश्चित प्रश्न होती है। ग्राफ पेपर का सही उपयोग और स्केल का ध्यान रखना बहुत ज़रूरी है।

• यह विधि बोर्ड परीक्षा में 3-4 अंकों के प्रश्न के रूप में अक्सर पूछी जाती है। चरणों को सही क्रम में लिखना और गणना में सावधानी बरतना बहुत ज़रूरी है।

• यह विधि बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। अक्सर इस पर आधारित सीधे प्रश्न आते हैं, या फिर बड़ी वर्ड प्रॉब्लम्स (शब्द समस्याएँ) भी इसी विधि से हल करनी होती हैं।

• विलोपन विधि बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इसमें सही गुणांकों का चयन और चिन्हों का ध्यान रखना बहुत ज़रूरी है, क्योंकि एक छोटी सी गलती पूरे हल को गलत कर सकती है।

• बोर्ड परीक्षाओं में विलोपन विधि पर आधारित प्रश्न अक्सर 3 से 5 अंकों के आते हैं। हर चरण को ध्यान से लिखें और उत्तर का सत्यापन करना न भूलें।

एक नज़र में रिवीज़न

› दो चर, घात 1, दो समीकरणों की जोड़ी.

› ग्राफीय निरूपण: प्रतिच्छेदी (एक हल), समांतर (कोई हल नहीं), संपाती (अनेक हल)।

› गुणांकों की तुलना (a/a, b/b, c/c) से हल की प्रकृति ज्ञात करें।

› ग्राफ पर रेखाएँ खींचकर प्रतिच्छेदन बिंदु से हल निकालना।

› एक चर का मान निकाल कर दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करें।

› एक चर का मान दूसरे के पदों में निकालें, दूसरे में रखें, हल करें।

› विलोपन: गुणांक समान कर, जोड़/घटाकर एक चर विलुप्त करो।

› विलोपन विधि: गुणांक बराबर करो, विलुप्त करो, मान निकालो।